

## מיני מתכונת במתמטיקה - כיתה יא' שאלון 581

ניסן תש"פ, מרץ 2020

### הוראות:

- משך המבחן: שלוש שעות וחצי (לבעלי תוספת זמן: ארבע שעות ורבע)
  - יש לענות על 2 מתוך 3 שאלות בפרק ראשון, שאלה אחת מתוך 2 בפרק שני ושתי שאלות מתוך 3 בפרק שלישי סה"כ 5 שאלות. משקל כל שאלה 20 נקודות.
  - אם תענה על יותר שאלות, יבדקו השאלות הראשונות בדף התשובות.
  - אם תיתן יותר מפתרון אחד לשאלה, ייבדק רק הפתרון ראשון.
  - יש להסביר את דרך הפתרון ולפרט את החישובים. תשובות ללא חישוב/נימוק לא יתקבלו.
  - חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון לא גרפי. דף נוסחאות מצורף לשאלון.
- בהצלחה רבה.

### **פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)**

ענה על שתיים מתוך השאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות)

1. אופנוע ומכונית יוצאים בו זמנית, האחד לקראת השני, מחיפה ומדימונה בהתאמה. כעבור שעה היה המרחק ביניהם 225 ק"מ. כעבור שעותיים מרגע יציאתם, היה המרחק ביניהם 150 ק"מ. כעבור פרק זמן נוסף, נפגשו בנקודה שמרחקה מדימונה גדול פי שניים ממרחקה מחיפה.
  - א. חשב את מהירויות המכונית והאופנוע.
  - ב. המרחק בין דימונה לבין חיפה הוא 300 ק"מ. מיד לאחר הפגישה, כאשר הרכבים ממשיכים בדרכם ליעדם, הפחיתה המכונית את מהירותה ב-200 קמ"ש, והאופנוע הגביר את מהירותו ב-50 קמ"ש. המכונית הגיעה ליעדה לפני שהאופנוע הגיע ליעדו. מצא את התחום המספרי בו נמצא הפרמטר  $m$ .
2. נתונה סדרה הנדסית ובה  $2n+1$  איברים ( $n$  הוא מספר טבעי).
  - א. הוכיחו כי מכפלת כל איברי הסדרה שווה לאיבר האמצעי שבה בחזקת  $2n+1$ .
  - ב. נתון כי  $a_1 = 1$  ו- $a_{2n+1} = 4096$ . כלומר:  $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{2n+1} = k$  כאשר  $k$  הוא האיבר האמצעי בסדרה.
  - ג. בנוסף, נתון כי יש בסדרה 25 איברים. מצאו את מנת הסדרה, אם נתון כי הסדרה עולה.
  - ד. ממשיכים את איברי הסדרה הנתונה עד אינסוף ויוצרים סדרה  $b_n$  חדשה על ידי:  $b_n = \frac{1}{a_n}$ . חשבו את היחס בין סכום כל איברי הסדרה  $b_n$  לבין סכום איבריה הנמצאים במקומות האי-זוגיים.

**המשך בעמוד הבא .....**

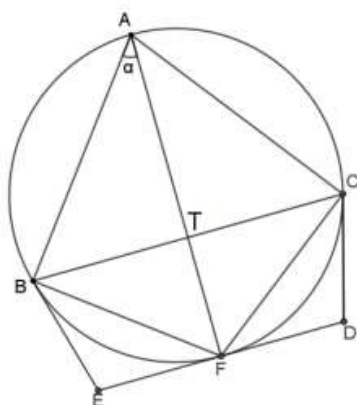
3. ערכו סקר בין משתתפי כינוס בחירות ומצאו: 20% מהנשים קוראות עיתון בוקר. מספר הגברים גדול פי  $a$  ממספר הנשים שקוראות עיתון בוקר.
- א. בטא באמצעות  $a$  את ההסתברות לבחור גבר מבין כלל תושבי העיר.
- ב. מהי ההסתברות לבחור משתתף/משתתפת שקורא/קוראת עיתון בוקר, אם ידוע שהמאורעות: "נבחרה אישה" ו-"נבחר מישהו שקורא/קוראת עיתון בוקר" בלתי תלויים? הסבר.
- ג. עבור הסעיפים הבאים: ידוע כי  $a = 6$ .
- נבחר באקראי משתתף/משתתפת מבין באי הכינוס. ידוע שהוא קורא/קוראת עיתון בוקר. מה סביר יותר, שהוא גבר או אישה?
- ד. הנח כי מספר המשתתפים בכינוס גדול מאד. בוחרים באקראי 6 ממשתתפי הסקר (גברים או נשים). מהי ההסתברות לבחור לפחות חמש נשים שקוראות עיתון בוקר?

## פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה (20 נקודות)

ענה על אחת מתוך השאלות 4-5

4.  $AD$  ו-  $CE$  הם חוצי זווית במשולש  $ABC$ , ונקודת החיתוך שלהם היא  $F$ . נתון:  $\angle ABC = 60^\circ$ .
- א. הוכח כי אפשר לחסום את המרובע  $BDFE$  במעגל.
- נתון:  $FB$  הוא קוטר במעגל החוסם את המרובע  $BDFE$ .
- ב. הוכח שהמשולש  $ABC$  הוא משולש שווה צלעות.
- המשך הקטע  $BF$  חותך את הצלע  $AC$  בנקודה  $G$ .
- ג. הוכח כי הקטע  $FG$  שווה באורכו לרדיוס המעגל החוסם את המרובע  $BDFE$ .
- בנקודה  $F$  מעבירים משיק למעגל החוסם את המרובע  $BDFE$ .
- המשיק חותך את הצלעות  $BA$  ו-  $BC$  בנקודות  $K$  ו-  $L$  בהתאמה.
- ד. מצא את היחס  $\frac{KL}{AC}$ . נמק את תשובתך.

המשך בעמוד הבא .....



5. במעגל שרדיוסו  $R$  חסום משולש  $ABC$ .

ידוע כי:

$AF$  הוא קוטר במעגל.

המשיק למעגל בנקודה  $F$  מקביל למיתר  $BC$ .

הנקודה  $E$  היא נקודת החיתוך של המשיק למעגל ב- $F$  עם

המשיק למעגל ב- $B$ .

הנקודה  $D$  היא נקודת החיתוך של המשיק למעגל ב- $F$  עם

המשיק למעגל ב- $C$ .  $AF$  ו- $BC$  נפגשים בנקודה  $T$ .

נתונה הזווית:  $\angle BAF = \alpha$ .

א. בטא באמצעות  $\alpha$  את  $\angle BEF$ . הסבר שיקוליך בקצרה.

אין צורך לפרט כהוכחה בגיאומטריה.

ב. הוכח כי:  $BE = R \tan \alpha$ .

ג. חשב את מידת הזווית  $\alpha$  עבורה שטח המשולש  $BFC$  גדול פי 3 משטח המשולש  $BEF$ .

ד. עבור  $\alpha = 30^\circ$ , בטא באמצעות  $R$  את אורכו של הקטע  $BD$ .

**פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות,**

**של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)**

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נקודות)

6. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}}$ ,  $a > 0$ .

א. מצאו והביעו באמצעות  $a$  (במידת הצורך) את:

(1) תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) אסימפטוטות המאונכות לצירים.

(3) תחומי עליה וירידה (אם יש כאלה).

(4) נקודות חיתוך עם הצירים (אם יש כאלה).

(5) סרטטו סקיצה של הגרף של  $f(x)$ .

ב. נגדיר פונקציה  $g(x) = a \cdot f(x)$ ,  $a > 0$ . הביעו באמצעות  $a$  (במידת הצורך):

(1) מהן האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה  $g(x)$ ?

(2) מהם הערכים שהפונקציה  $g(x)$  יכולה לקבל? (ערכי ה- $y$  של הפונקציה)

(3) נתון  $b > a$ . נמקו מדוע  $\int_b^{b+a} g(x) dx < a^2$ .

**המשך בעמוד הבא .....**

7. נתונה הפונקציה  $f(x) = \sin x + \cos x$  בתחום  $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{7\pi}{4}$ .

א. (1) מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(2) מצאו את נקודות הקיצון.

(3) סרטטו את גרף הפונקציה.

(4) מגדירים פונקציה  $g(x)$  על-ידי  $g(x) = f(x) + m$ .

עבור אילו ערכי  $m$  גרף הפונקציה  $g(x)$  משיק לציר ה- $x$ ? נמקו.

ב. (1) שרטטו בקו מקווקו, באותה מערכת צירים של הגרף בסעיף א' (3), את גרף הפונקציה

$$h(x) = |\sin x + \cos x| \quad \text{בתחום} \quad -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{7\pi}{4}$$

(2) הראו כי לכל  $x$  מתקיים  $f(x - \pi) = -f(x)$ .

(3) נסמן ב- $S$  את האינטגרל  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} f(x) dx$ . היעזרו בסעיפים הקודמים והבע בעזרת  $S$  את  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} h(x) dx$ . נמקו תשובתכם.

8. נתונה הפונקציה:  $f(x) = (x^2 - 9)^{n+1}$  ( $n$  מספר טבעי גדול מ-1).

א. היעזר בפרמטר  $n$ , במידת הצורך ומצא את נקודות החיתוך עם הצירים של גרף  $f(x)$ .

ב. על גרף הפונקציה  $f(x)$  מצא את שיעורי הנקודות שבהן מתקיים  $f'(x) = 0$  וקבע האם כל

נקודה היא נקודת מינימום, נקודת מקסימום או נקודת פיתול. הבחן בין ערכי  $n$  שונים.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  עבור  $n$  זוגי ועבור  $n$  אי זוגי.

ד. הגדירו פונקציה חדשה:  $g(x) = x \cdot f(x)$ . נתון ש- $n$  הוא אי זוגי.

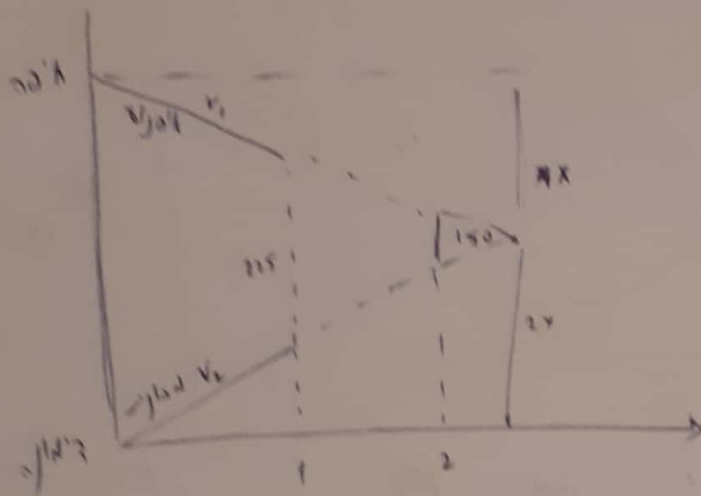
1. קבע האם הפונקציה  $g(x)$  היא זוגית, אי זוגית או שאינה זוגית ואינה אי זוגית.

2. מבלי לגזור את הפונקציה  $g(x)$ , שרטט סקיצה של גרף הפונקציה עבור  $n$  אי זוגי.

3. סכום השטחים הכלואים בין גרף הפונקציה  $g(x)$  לבין ציר ה- $x$  הוא:  $\frac{9^5}{n+2}$ . מצא את  $n$ .

## בהצלחה רבה

אברהם יצחק יוסף



$$\frac{V_1 + V_2 + 225}{V_1 + V_2 + 225} = \frac{2V_1 + 2V_2 + 150}{V_1 + V_2 + 225}$$

$$V_1 + V_2 = 75$$

המחיר 1700 ₪

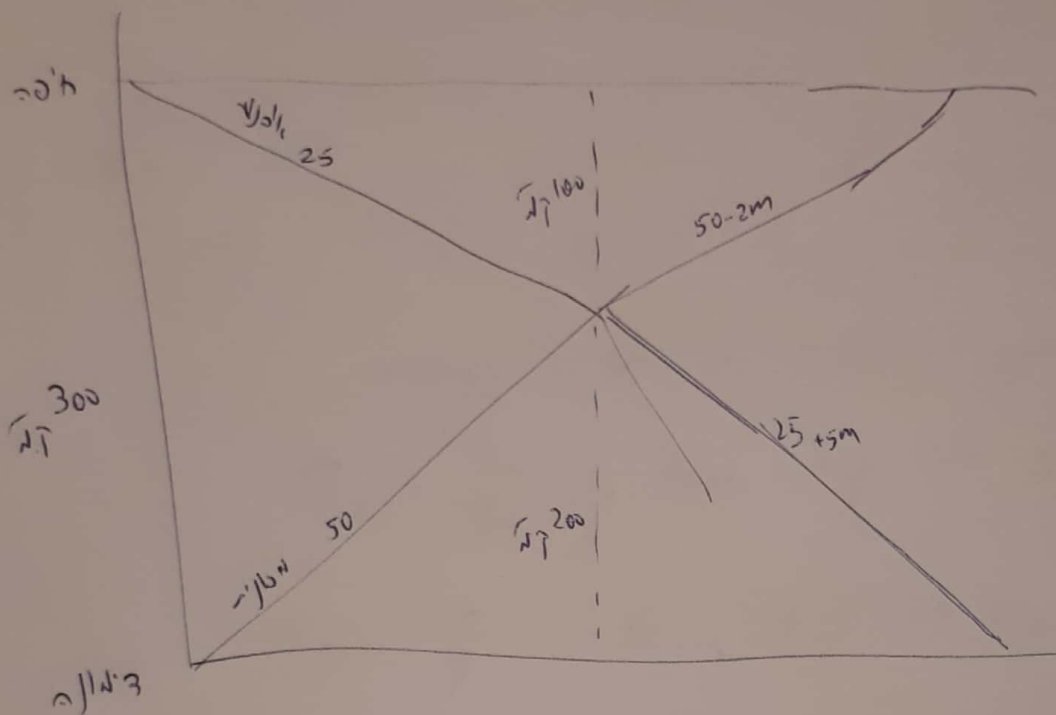
| 3      | 5 | N     |        |
|--------|---|-------|--------|
| $V_1$  | 1 | $V_1$ | 1/100% |
| $V_2$  | 1 | $V_2$ | 1/100% |
| $2V_1$ | 2 | $V_1$ | 1/100% |
| $2V_2$ | 2 | $V_2$ | 1/100% |

|       |                   |       |               |
|-------|-------------------|-------|---------------|
| 100 % | $\frac{100}{V_1}$ | $V_1$ | $V_1 / 100\%$ |
| 200 % | $\frac{200}{V_2}$ | $V_2$ | $V_2 / 100\%$ |

$$\frac{100}{v_1} = \frac{200}{v_2}$$

$$\frac{100}{V_1} = \frac{200}{75 - V_1}$$

$$\begin{array}{|l} 75 - V_1 = 2 V_1 \\ V_1 = 25 \\ V_2 = 50 \end{array}$$



$$\frac{200}{25+5m}$$

מסלול

$$\frac{100}{50-2m}$$

מסלול

$$\frac{100}{50-2m} < \frac{200}{25+5m} \quad / : 100$$

המסלול הקטן מה'חלל' ופס' חלל'.

$$25+5m < 2(50-2m)$$

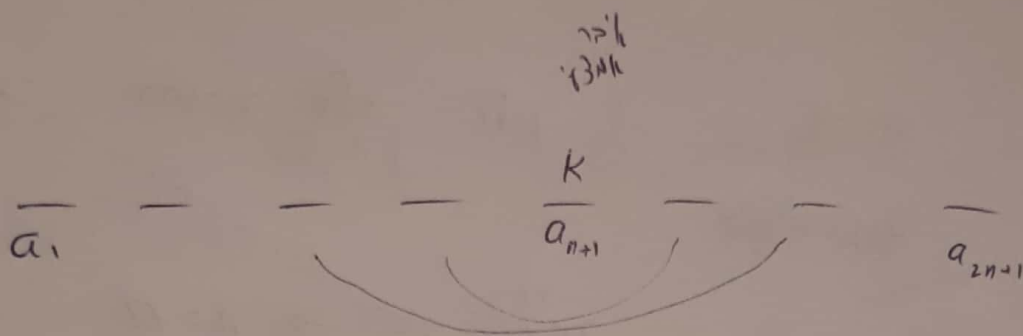
$$25+5m < 100-4m$$

$$9m < 75$$

$$m < 8\frac{1}{3}$$

m הוא סכום של מסלול ופס' חלל'.

$$0 < m < 8\frac{1}{3}$$



(2)

אם גילוי המספר  $K$  סדרה הנדסית

$$a_n = \frac{K}{q}, \quad a_{n+2} = K \cdot q \rightarrow a_n \cdot a_{n+2} = K^2$$

$$a_{n-1} = \frac{K}{q^2}, \quad a_{n+3} = K \cdot q^2 \rightarrow a_{n-1} \cdot a_{n+3} = K^2$$

אם מספר  $K$  הוא איברי סדרה סבבית האבר  
הממוצע הוא  $K^2$ .

מספר האיברים הוא  $n$

וצריך להכפיל גם האיבר המרכזי וזוהי

המספר הוא

$$(K^2)^n \cdot K = K^{2n+1}$$

הוא

$$a_1 = 1$$

$$a_{2n+1} = 4096$$

אם המספר

$$a_{n+1}^2 = a_1 \cdot a_{2n+1}$$

$$K^2 = 4096$$

$$K = \pm 64$$

$$a_1 = 1 \quad a_{25} = 4096$$

٤٠

$$4096 = 1 \cdot g^{24} \rightarrow g = \sqrt[24]{4096} = \pm \sqrt{2}$$

הנסרה אלה ה'שלם ח'ל'ז' כ'ז'  $g > 1$

$$g = \sqrt{2}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{\frac{1}{a_n}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{g_A} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$g_B = \frac{1}{\sqrt{2}}$        $b_1 = \frac{1}{a_1} = 1$       B      30°

$$S_{\infty}^B = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = 3.414$$

סדרת הא' ב' ו' בשאלה הא' ג' י"א

$$c_1 = b_1 = 1$$

$$f_C = f_B^2 = \frac{1}{2}$$

$$S_{\infty}^c = \frac{C_1}{1 - g_c} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

$$\frac{\sum_{\infty}^B}{\sum_{\infty}^C} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}-1)} = \underline{\underline{1.707}}$$

|  | גורם     | שם   | 3     |
|--|----------|------|-------|
|  |          | 0.2x | קלי   |
|  |          | 0.8x | ל קלי |
|  | 0.2x · a | x    |       |

$$P(\text{שם}) = x \quad \text{שם}$$

$$0.2 = P(\text{קלי} / \text{שם}) = \frac{P(\text{קלי} \cap \text{שם})}{P(\text{שם})} = \frac{P(\text{קלי} \cap \text{שם})}{x}$$

$$P(\text{קלי} \cap \text{שם}) = 0.2x$$

$$P(\text{שם}) = a \cdot P(\text{שם} \cap \text{קלי}) = 0.2x \cdot a$$

$$x + 0.2x \cdot a = 1 \quad / \cdot 5$$

$$5x + ax = 5$$

$$x(5+a) = 5 \rightarrow x = \frac{5}{5+a}$$

$$P(\text{שם}) = 0.2 \cdot \frac{5}{5+a} \cdot a = \underline{\underline{\frac{a}{5+a}}}$$

|   | 728             | 506             |                  |
|---|-----------------|-----------------|------------------|
|   |                 | $\frac{1}{5+a}$ | $P(1/7)$         |
|   |                 | $\frac{4}{5+a}$ | $P(1/7) \cdot 4$ |
| 1 | $\frac{a}{5+a}$ | $\frac{5}{5+a}$ |                  |

inference

$$P(1/7) \cdot P(506) = P(1/7 \cap 506)$$

$$P(1/7) \cdot \frac{5}{5+a} = \frac{1}{5+a}$$

$$\underline{\underline{P(1/7) = 0.2}}$$

$$a=6$$

|     | ע'ל             | סב'ל           |      |
|-----|-----------------|----------------|------|
| 0.2 | $\frac{6}{55}$  | $\frac{1}{11}$ | ק'ל  |
| 0.8 | $\frac{24}{55}$ | $\frac{4}{11}$ | ק'ל' |
| 1   | $\frac{6}{11}$  | $\frac{5}{11}$ |      |

$$P(\text{ע'ל} \cap \text{ק'ל}) = 0.2 - \frac{1}{11} = \frac{6}{55}$$

$$P(\text{ע'ל} \cap \text{ק'ל}') = \frac{6}{11} - \frac{6}{55} = \frac{24}{55}$$

$$P(\text{ע'ל} / \text{ק'ל}) = \frac{P(\text{ע'ל} \cap \text{ק'ל})}{P(\text{ק'ל})} = \frac{\frac{6}{55}}{0.2} = \frac{6}{11}$$

$$P(\text{סב'ל} / \text{ק'ל}) = \frac{P(\text{סב'ל} \cap \text{ק'ל})}{P(\text{ק'ל})} = \frac{\frac{1}{11}}{0.2} = \frac{5}{11}$$

לפי כלל סב'ל ע'ל

... 10/11

... 3

$$P(\text{all 6 are } 1) = \frac{1}{11^6}$$

$n=6$

... 5 ...

~~$P_A \times P_B$~~

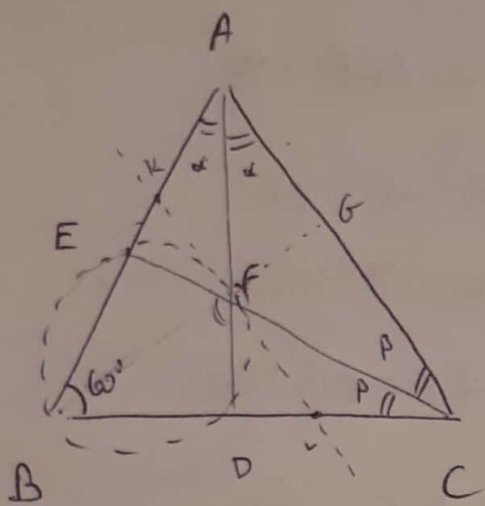
$$P = P_5(6) + P_6(6) =$$

$$= \binom{6}{5} \cdot \left(\frac{1}{11}\right)^5 \cdot \left(\frac{10}{11}\right)^1 + \binom{6}{6} \cdot \left(\frac{1}{11}\right)^6 \cdot \left(\frac{10}{11}\right)^0 =$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{11^5} \cdot \frac{10}{11} + 1 \cdot \frac{1}{11^6} = \frac{61}{11^6} = \frac{1}{29042}$$

$$= 0.0000344$$

4



180° ABC  
 180° AFE

$$2\alpha + 2\beta = 120^\circ$$

$$\alpha + \beta = 60^\circ$$

180° AFE  
 180° AFC

$$\angle AFE = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

180° EFD

$$\angle EFD = \angle AFC = 120^\circ$$

$$\angle EBD + \angle EFD = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$$

הוכחה  
 שכל זווית בד"ש  
 היא 180°

BDFE  
 הוא מרובע

QED

2.  $\angle AEF = 90^\circ$  כל זווית הנשענת על קוטר

CE נקודה חיצונית וכן  $\triangle ABC$  שווה  
 $AC = BC$  משמע

כל זווית בסיס במثل שווה  $\angle A = \angle B = 60^\circ$

כל זווית במثل שווה  $\angle C = 60^\circ$

$\triangle ABC$  שווה  $\angle$  חז"ל  $60^\circ$  משמע

3. F נקודה חיצונית במהלך ABC

במהלך שווה חז"ל ומקבילים  
 וכן F היא גם נקודה חיצונית.

נקודה חיצונית מחוץ לזווית  $FG = \frac{1}{2} BF$

קוטר  $BF = 2r$   
 $FG = r$  משמע

משני מוקדים חיצונית הנקודה

3.  $KL \perp BF$

$AC \perp BG$

משמע  $AC \parallel KL$   
 משמע  $AC \parallel KL$   
 משמע  $AC \parallel KL$

$AC \parallel KL$

משמע  $AC \parallel KL$   
 משמע  $AC \parallel KL$   
 משמע  $AC \parallel KL$

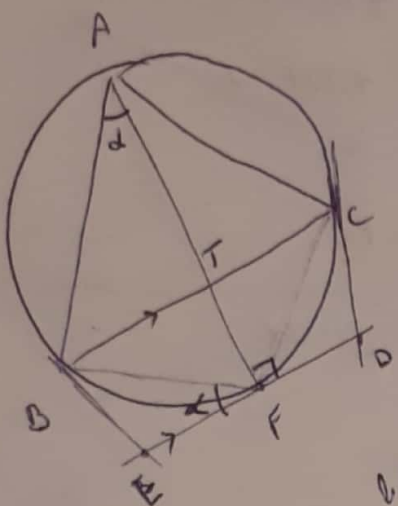
-/13  $\angle A = \angle BKL$   
 -/13  $\angle B$   
 .3.3  $\Delta BKL \sim \Delta BAC$

יחס הצדדים במשולש זווית  
 יחס הזוויות  
 $\frac{BF}{BG} = \frac{KL}{AC}$

יחס הזוויות  
 $\frac{1}{3} : \frac{2}{3}$   
 $\frac{2}{3} = \frac{KL}{AC}$

לכן

5



הנקודה F היא נקודה על הקשת BC  
הנקודה E היא נקודה על הקשת AB  
הנקודה T היא נקודת חיתוך הקוטר AC והקוטר BD

$\angle BFE = \angle BAF = \alpha$  .1

$EF = EB$

הנקודה E היא נקודה על הקשת AB  
הנקודה F היא נקודה על הקשת BC

$\angle EBF = \alpha$

$\angle BEF = 180 - 2\alpha$

$\triangle ABF$  משולש שווה שוקים  
השוקים הם AB ו- BF

$\frac{BF}{\sin \alpha} = 2R$

$BF = 2R \sin \alpha$

$\triangle BEF$  משולש שווה שוקים  
השוקים הם BE ו- EF

$\frac{BE}{\sin \alpha} = \frac{BF}{\sin (180 - 2\alpha)}$

$\frac{BE}{\sin \alpha} = \frac{2R \sin \alpha}{\sin 2\alpha}$

$BE = \frac{2R \sin \alpha \cdot \sin \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha}$

$BE = R \tan \alpha$

1.  $\angle CBF = \angle BFE = \alpha$   
 2.  $\angle BCF = \angle BAF = \alpha$   
 3.  $\angle BFC = 180 - 2\alpha$   
 4.  $BF = FC$

5.  $\triangle BCF \sim \triangle BFE$

$$\angle BFC = 180 - 2\alpha$$

$$S_{\triangle BFC} = 3 \cdot S_{\triangle BFE}$$

$$\frac{1}{2} \cdot BE \cdot EF \cdot \sin(180 - 2\alpha) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot BF \cdot FC \cdot \sin(180 - 2\alpha)$$

$$R \tan \alpha \cdot R \tan \alpha = 3 \cdot 2R \sin \alpha \cdot 2R \sin \alpha$$

$$R^2 \tan^2 \alpha =$$

$$\frac{1}{2} \cdot BF \cdot FC \cdot \sin(180 - 2\alpha) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot BE \cdot EF \cdot \sin(180 - 2\alpha)$$

$$2R \sin \alpha \cdot 2R \sin \alpha = 3 \cdot R \tan \alpha \cdot R \tan \alpha$$

$$4R^2 \sin^2 \alpha = 3R^2 \tan^2 \alpha$$

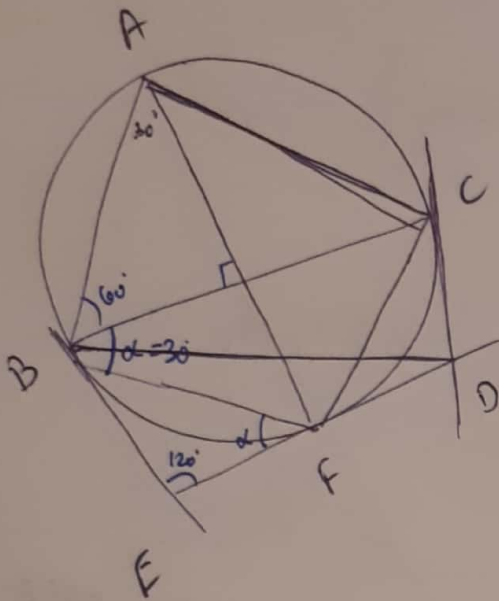
$$4 \sin^2 \alpha = 3 \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha = 30^\circ$$



$$\alpha = 30^\circ$$

.3

$$\angle ABC = 60^\circ$$

AB

$$AF \perp BC$$

طول AB و AC  
مساويان  
في المثلث ABC  
لأنه مثلث متساوي الساقين  
لأن  $\angle ABC = \angle ACB = 60^\circ$

$$BF = CF = 2R \sin 30^\circ = R$$

$$\triangle BFE \cong \triangle CFD$$

$$FD = EF = BE = R \tan 30^\circ = \frac{R}{\sqrt{3}}$$

$$\triangle BED$$

$$BD^2 = BE^2 + ED^2 - 2 \cdot BE \cdot ED \cos 120^\circ$$

$$= \frac{R^2}{3} + \left(2 \cdot \frac{R}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \cdot \frac{R}{\sqrt{3}} \cdot 2 \cdot \frac{R}{\sqrt{3}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{R^2}{3} + \frac{4R^2}{3} + \frac{2R^2}{3} = \frac{7R^2}{3}$$

$$BD = \sqrt{\frac{7}{3}} R = \underline{\underline{1.53R}}$$

6

$$f(x) = \frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad a > 0$$

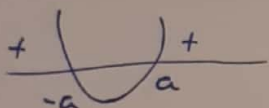
$$x^2 - a^2 \geq 0$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} \neq 0$$

(1)

$$x^2 - a^2 \neq 0$$

$$x \neq \pm a$$



$$\boxed{x < -a, \quad x > a \quad \therefore}$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{x} = 1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x \rightarrow +\infty \quad y = 1 \\ x \rightarrow -\infty \quad y = -1 \end{array}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -a} f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{-x} = -1$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{0}{0}$$

$$f(x) = \frac{\cancel{\sqrt{x+a}} \cdot \sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a} \cdot \cancel{\sqrt{x+a}}}$$

3x3

$$\frac{0}{\sqrt{2a}} = 0 \quad \text{as } x \rightarrow a \quad \text{3x3}$$

$$\boxed{\ln(a, 0)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -a} f(x) = \frac{-2a}{\sqrt{0}} \rightarrow \infty$$

$$\boxed{\text{as } x \rightarrow -a}$$

$$f' = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2 - a^2} - (x-a) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}}{x^2 - a^2} \quad (3)$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{x(x-a)}{\sqrt{x^2 - a^2}}}{x^2 - a^2} = \frac{x^2 - a^2 - x^2 + ax}{(x^2 - a^2) \sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$= \frac{ax - a^2}{(x^2 - a^2) \sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$ax^2 - a^2 = 0 \quad / :a$$

0-5 n/v)

$$\Rightarrow x = a$$

| x  | x <          | -a  | a   | < x |
|----|--------------|-----|-----|-----|
| f' | <del>+</del> | /// | /// | +   |
| f  | ↓            | /// | /// | ↗   |

x > a : n'f w/n

x < -a : n'f w/n

$$f(2a) = \frac{a \cdot 2a - a^2}{(2a^2 - a^2) \sqrt{2a^2 - a^2}} = \frac{a^2}{a^2 \sqrt{a^2}} > 0$$

$$f(-2a) = \frac{a \cdot (-2a) - a^2}{((-2a)^2 - a^2) \sqrt{(-2a)^2 - a^2}} = \frac{-3a^2}{3a^2 \sqrt{a^2}} < 0$$

(4)  $y = \sqrt[3]{x}$   $y' = \frac{1}{3}x^{-2/3}$   $y' = \frac{1}{3}x^{-2/3}$

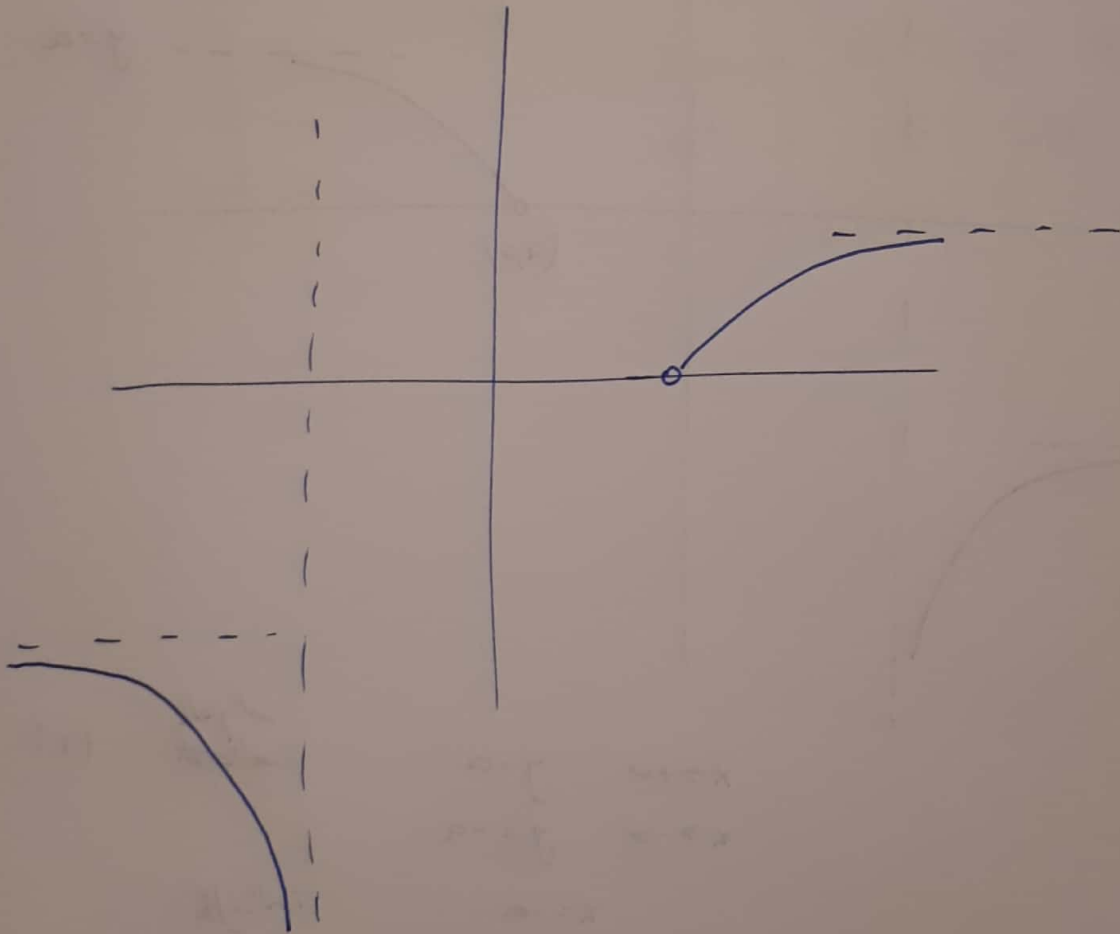
$x = a$   $y = \sqrt[3]{a}$   $y' = \frac{1}{3}a^{-2/3}$

$$x - a = 0$$

$$x = a$$

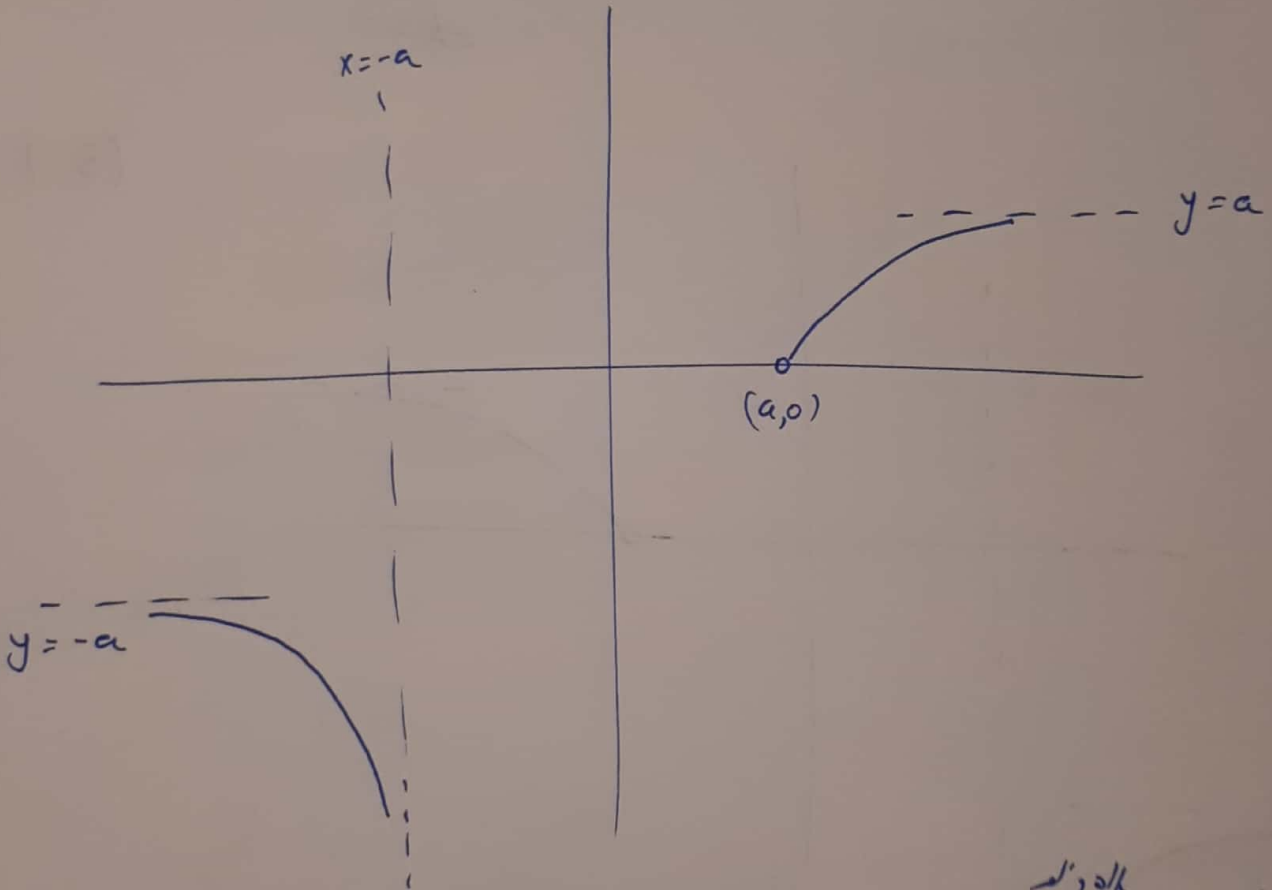
$y'$

(5)



$$g(x) = a \cdot f(x) \quad a > 0$$

(2)  $g(x)$  היא הפונקציה  $f(x)$  בעלת חז"ל  $a$  ושיעור  $b$  של  $g(x)$  הוא  $b$



$$x \rightarrow +\infty \quad y = a$$

$$x \rightarrow -\infty \quad y = -a$$

$$x = -a$$

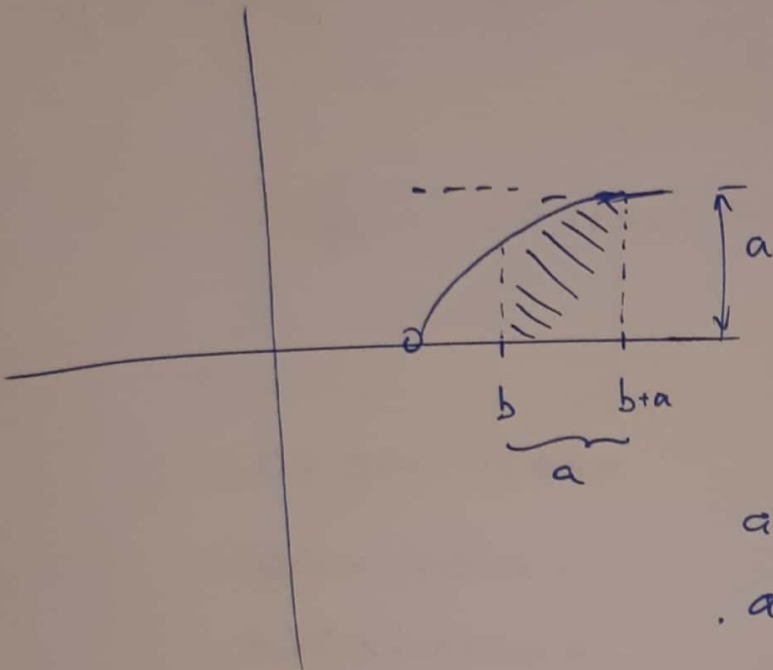
כן  $y(x)$  ו-  $y'$  (2)

$$0 < y \leq a$$

$$y < -a$$

$$\int_b^{b+a} g(x) dx$$

הגובה (3)  
המקור של הנגזרת



הנאום קטן מ'ה'ב'א' ש'א'א  
נ'ק'ן מ'א'א' .

$$-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{7\pi}{4} \quad f(x) = \sin x + \cos x$$

(7)

$$f(0) = \sin 0 + \cos 0 = 1 \quad \therefore y = 1 \quad (1)$$

$$\boxed{(0, 1)}$$

$\therefore x = 0$

$$0 = \sin x + \cos x$$

$$-\sin x = \cos x$$

$$\sin(-x) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\frac{\pi}{2} + x = x + 2\pi k$$

$\emptyset$

$$\frac{\pi}{2} + x = -x + 2\pi k$$

$$2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} -\frac{\pi}{4}, 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\pi, 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{7}{4}\pi, 0 \end{pmatrix}}$$

| k | x                           |
|---|-----------------------------|
| 0 | $-\frac{\pi}{4} \checkmark$ |
| 1 | $\frac{3}{4}\pi \checkmark$ |
| 2 | $\frac{7}{4}\pi \checkmark$ |

$$\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$$

$$\left(\frac{7\pi}{4}, 0\right)$$

نقطه

(2)

در ادامه:

$$f' = \cos x - \sin x$$

$$\cos x - \sin x = 0$$

$$\cos x = \sin x$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$x = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{5\pi}{4}$$

$$x = -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{2} + x + 2\pi k$$

Ø

| x    | $-\frac{\pi}{4}$ | $\angle x <$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\angle x <$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\angle x <$ | $\frac{7\pi}{4}$ |
|------|------------------|--------------|-----------------|--------------|------------------|--------------|------------------|
| $f'$ |                  | +            | 0               | -            | 0                | +            |                  |
| $f$  | نقطه             | ↗            | نقطه            | ↘            | نقطه             | ↗            | نقطه             |

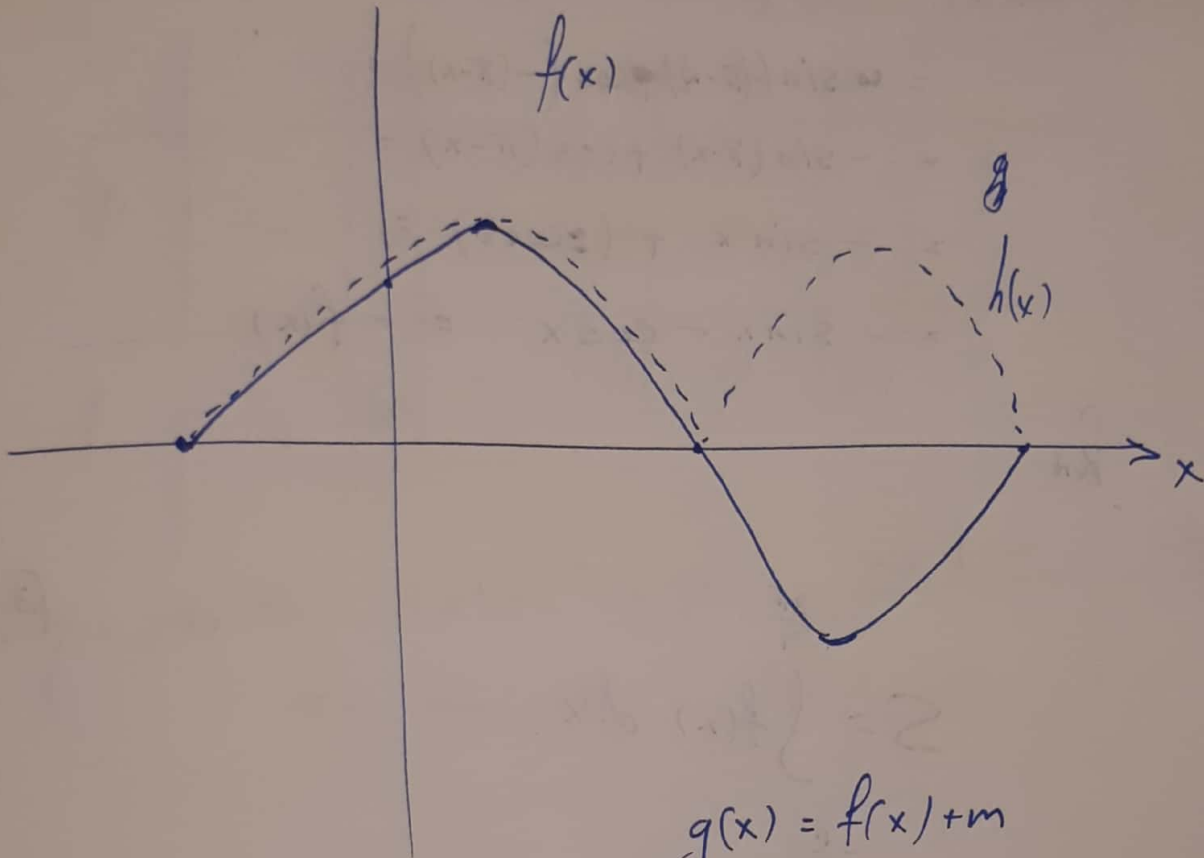
$$\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$$

$$\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$$

$$\left(\frac{7\pi}{4}, 0\right)$$

$$\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$$

(3)



נני שזהו ישר צ'ר x צ'רן להרים אול  $\sqrt{2}$   
א להריו אול  $\sqrt{2}$

$$m = \pm \sqrt{2}$$

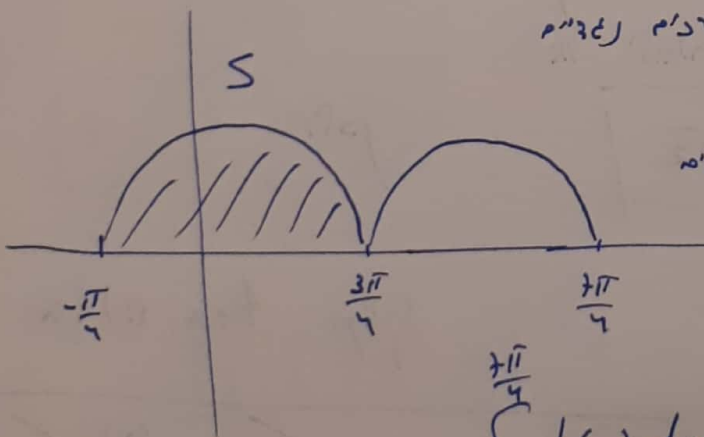
ורבן

ג. (1) זהו מקווקא.

$$\begin{aligned}
 f(x-\pi) &= \sin(x-\pi) + \cos(x-\pi) = \\
 &= \sin(-(\pi-x)) + \cos(-(\pi-x)) = \\
 &= -\sin(\pi-x) + \cos(\pi-x) = \\
 &= -\sin x + (-\cos x) = \\
 &= -\sin x - \cos x = -f(x)
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

$f_{\pi}$

$$S = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x) dx \tag{3}$$



הנאלי בסוף (2) כי בהצבה של  $\pi$  הכולק משתנה עם זיכרים נגדיים  
 זמן נאלי נחשב זמן מלא  
 נקודת חברה של כל מה זיכרים  
 זמן בסוף  $h$  הנשחית  
 יהי' שוליים

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} h(x) dx = 2S$$

$$f(x) = (x^2 - 9)^{n+1} \quad n > 1$$

8

$$x=0 \quad \therefore y=3 \quad .6$$

$$f(0) = (0^2 - 9)^{n+1} = (-9)^{n+1}$$

$$\boxed{(0, (-9)^{n+1})}$$

$$0 = (x^2 - 9)^{n+1} \quad \therefore x = \pm 3$$

$$x^2 - 9 = 0 \quad x = \pm 3$$

$$\boxed{(3, 0) \quad (-3, 0)}$$

$$f' = (n+1)(x^2 - 9)^n \cdot 2x = 2(n+1)x(x^2 - 9)^n$$

$$2 \underbrace{(n+1)x}_{\text{is } n} (x^2 - 9)^n = 0$$

$$\begin{array}{l} x(x^2 - 9) = 0 \\ \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ x=0 \quad \quad x = \pm 3 \end{array}$$

$$\boxed{(0, 0) \quad (3, 0) \quad (-3, 0)}$$

: 3/3/1 3/3/6 3/3/1 3/3/2

$$f' = 2(n+1) \cdot x \cdot (x^2-9)^n$$

פונקציה של מסדר  $n$  ב- $(x^2-9)^n$  : נקודות קיצון

| x  | -3 |      | 0 |      | 3 |      |   |
|----|----|------|---|------|---|------|---|
| f' | -  | 0    | - | 0    | + | 0    | + |
| f  | ↓  | כיתה | ↓ | מיני | ↑ | כיתה | ↑ |

הפונקציה  $(x^2-9)^n$  היא פונקציה זוגית  
 כל נקודות קיצון יהיו של סוג (-) ושל סוג (+)

| x  |   | -3             |   | 0              |   | 3              |   |
|----|---|----------------|---|----------------|---|----------------|---|
| f' | - |                | + |                | - |                | + |
| f  | ↘ | j <sup>n</sup> | ↗ | 0 <sup>n</sup> | ↘ | j <sup>n</sup> | ↗ |

נקודות קיצון

מיני (-3,0)

מקסימום (0,0)

מיני (3,0)

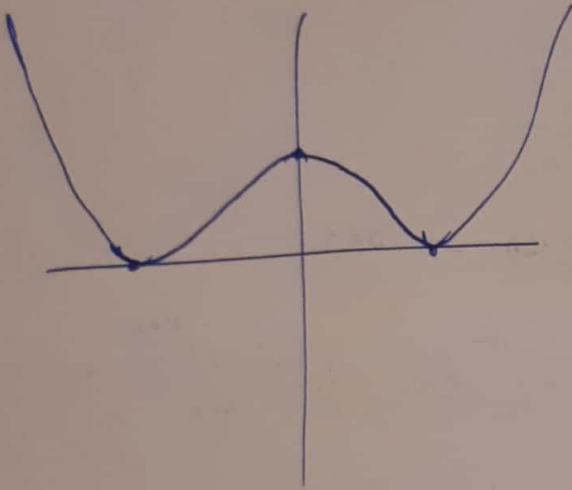
נקודות קיצון

כיתה (-3,0)

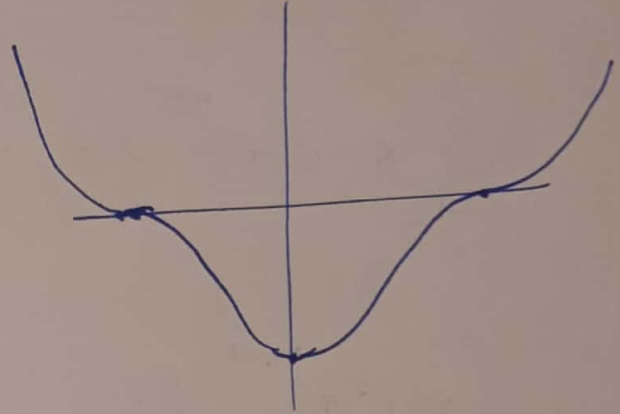
מיני (0,0)

כיתה (3,0)

نکات



نکات



نکات

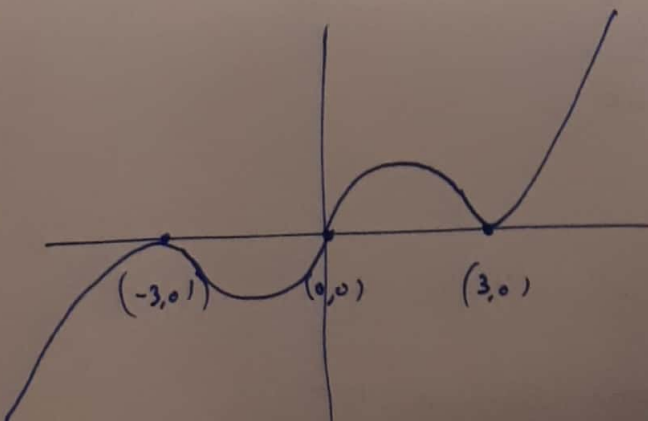
$$g(x) = x \cdot f(x)$$

$$= x(x^2 - 9)^{n+1}$$

$$\begin{aligned} g(-x) &= (-x) \cdot ((-x)^2 - 9)^{n+1} = \\ &= -x \cdot (x^2 - 9)^{n+1} = -g(x) \end{aligned} \quad (1)$$

نکات  $g(x)$

(2)



نکات  
 $f(x) = 0$   
 $x = 3$   
 $x = 0$

(3) הילכן כי הפונקציה  $g(x)$  היא פולינום? וכן יש סימטריה

במרכז של המעגלים האלה

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{9^5}{n+2}$$

$$\int_0^3 x(x^2-9)^{n+1} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{9^5}{n+2}$$

נעשה לה האירטור

$$\int x(x^2-9)^{n+1} dx = \frac{1}{2} \int 2x(x^2-9)^{n+1} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2-9)^{n+2}}{n+2} + C$$

וכן

$$\int_0^3 x(x^2-9)^{n+1} dx = \left. \frac{(x^2-9)^{n+2}}{2(n+2)} \right|_0^3 =$$

$$= \left( \frac{(3^2-9)^{n+2}}{2(n+2)} \right) - \left( \frac{(0^2-9)^{n+2}}{2(n+2)} \right) =$$

$$= 0 - \frac{(-9)^{n+2}}{2(n+2)} = - \frac{(-9)^{n+2}}{2(n+2)}$$

אז

$$- \frac{(-9)^{n+2}}{2(n+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{9^5}{n+2}$$

$$-(-9)^{n+2} = 9^5$$

כאן  $n+2$  ז'ל'  $n$  וכן, ז'ל'  $n$

$$(-9)^{n+2} = -9^{n+2} \rightarrow n+2=5 \rightarrow \underline{\underline{n=3}}$$